

# 2020

1º Semestre



**Módulo Discursivo**  
**Matemática Aplicada**

## **VESTIBULAR** **FGV**

### **GRADUAÇÃO EM** **MATEMÁTICA APLICADA – RJ**

#### **Instruções para a Prova de MATEMÁTICA APLICADA:**

- Confira se seu nome e RG estão corretos.
- Não se esqueça de assinar a capa deste caderno, no local indicado, com caneta azul ou preta.
- A duração total do Módulo Discursivo é de 4h.
- Antes de iniciar a prova, verifique se o caderno contém 10 questões e se a impressão está legível.
- A prova de Matemática Aplicada poderá ser respondida a lápis.
- As resoluções dos candidatos deverão ser redigidas nos espaços destinados a elas, com letra legível.
- As respostas deverão apresentar a resolução completa das questões. Não basta escrever apenas o resultado final, é necessário mostrar o raciocínio utilizado e os cálculos, quando for o caso.
- Não é permitido o uso de calculadora.
- Não se identifique em nenhuma das folhas do corpo deste caderno, pois isso implicará risco de anulação.
- O candidato só poderá deixar definitivamente o local das provas a partir de duas horas após seu início.
- Não haverá substituição deste caderno.
- O candidato é responsável pela devolução deste caderno ao fiscal de sala.
- Adverte-se que o candidato que se recusar a entregar este caderno, dentro do período estabelecido para realização das provas do Módulo Discursivo, terá automaticamente sua prova anulada.

**NOME:**

**IDENTIDADE:**

**INSCRIÇÃO:**

**LOCAL:**

**DATA:** 27/10/2019

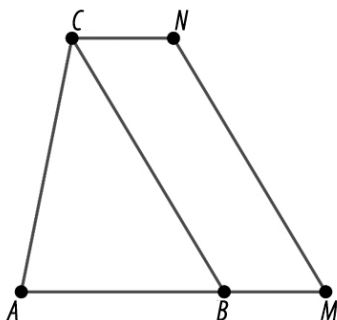
**SALA:**

**ORDEM:**

**Assinatura do Candidato:** \_\_\_\_\_

## MATEMÁTICA APLICADA

- 1 No triângulo  $ABC$ , tem-se  $\overline{AB} = 4\text{cm}$ , e a altura baixada por  $C$  e perpendicular a  $\overline{AB}$  tem comprimento  $h = 5\text{cm}$ . No prolongamento do segmento  $\overline{AB}$ , temos o ponto  $M$ , e o quadrilátero  $BMNC$  é um paralelogramo. Sabendo que a área do quadrilátero  $AMNC$  é igual a  $20\text{ cm}^2$ , calcule o comprimento do segmento  $\overline{BM}$ .



## RESOLUÇÃO E RESPOSTA

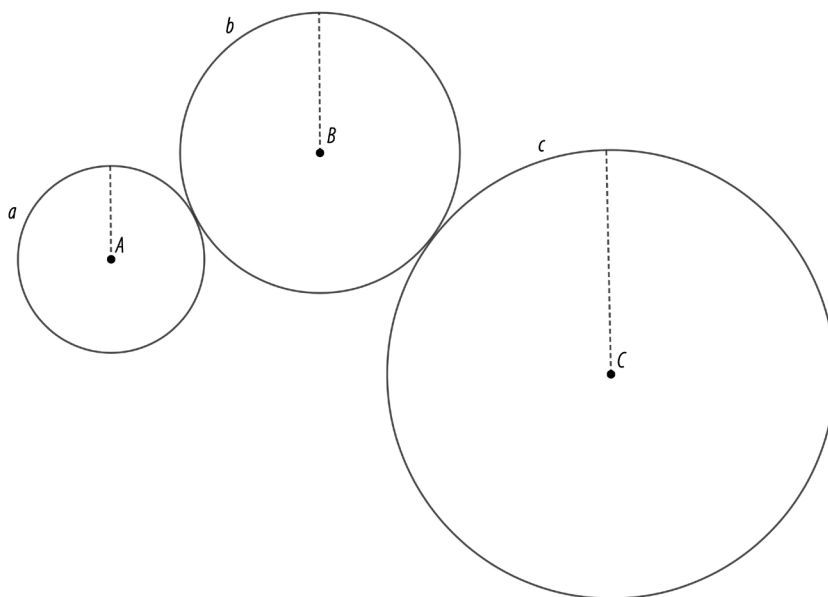
NOTA

## MATEMÁTICA APLICADA

- 2 Os três círculos da figura representam três rodas circulares que podem girar em torno de seus centros. A roda  $a$  de centro  $A$  tangencia a roda  $b$  de centro  $B$ , que, por sua vez, tangencia a roda  $c$  de centro  $C$ . Quando a roda  $a$  gira em torno de  $A$ , ela induz uma rotação de  $b$ , em torno de  $B$ , que, por sua vez, induz uma rotação de  $c$  em torno de  $C$ . As transmissões das rotações se dão perfeitamente, pois não há deslizamento entre uma roda e outra.

Os raios marcados na figura estão todos na vertical, e esta é a configuração antes de  $a$  começar a girar.

Sabendo que os raios de  $a$ ,  $b$  e  $c$  são, respectivamente, 20 cm, 30 cm e 48 cm, calcule o menor número de voltas completas que a roda  $a$  tem que efetuar para que todos os raios marcados voltem a ficar simultaneamente na vertical.



## RESOLUÇÃO E RESPOSTA

NOTA

**MATEMÁTICA APLICADA**

- 3 A quantidade de mortadela que a *Padaria da Esquina* consegue vender mensalmente depende do preço estabelecido para o produto. O gerente da *Padaria da Esquina* percebeu que a quantidade  $q$  (em kg) de mortadela vendida por mês é aproximadamente a seguinte função do preço  $x$  (em reais/kg):  $q(x) = 600 - 25x$ . Atualmente, o preço da mortadela é  $x = 10$  reais por quilograma, portanto a quantidade vendida por mês é aproximadamente  $q(10) = 350$  kg. O faturamento da *Padaria da Esquina* com a venda de mortadela é a quantidade vendida multiplicada pelo preço unitário. Como exemplo, com o preço atual,  $x = 10$  reais, a *Padaria da Esquina* consegue faturar  $(600 - 25 \cdot 10) \cdot 10 = 3500$  reais por mês com a venda de mortadela. Qual é o preço  $x$ , em reais, que a *Padaria da Esquina* deve estabelecer para o quilograma de mortadela de modo a maximizar seu faturamento com a venda desse produto?

**RESOLUÇÃO E RESPOSTA****NOTA**

## MATEMÁTICA APLICADA

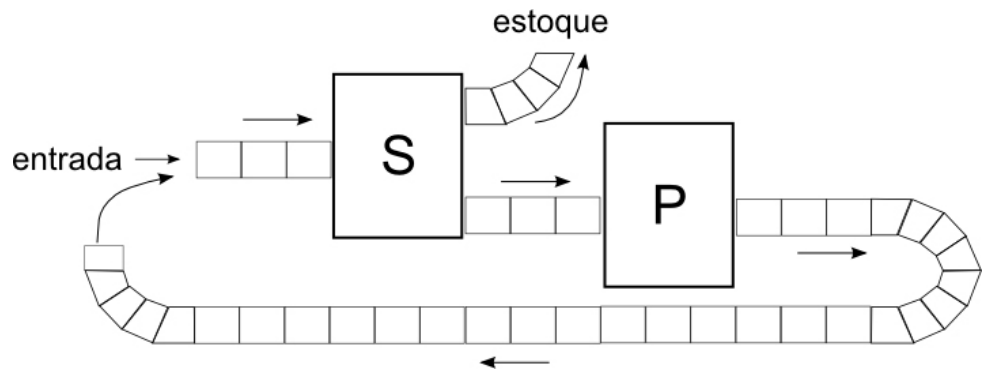
- 4 Certa fábrica produz chocolates e deseja fazer uma promoção colocando um ou mais selos premiados em algumas barras de seu produto. Em cada selo, está escrito "Vale Outra Barra de Chocolate".

Na fábrica, há duas máquinas: a S (separar) e a P (premiar).

A máquina S pega cada barra de chocolate que está em sua esteira de entrada e a coloca, alternadamente, na esteira de saída esquerda (que vai para o estoque) ou direita (que vai para a esteira de entrada de P). A primeira barra da esteira de entrada vai para o estoque.

A máquina P insere na embalagem de cada chocolate de sua esteira de entrada um selo premiado.

Inicialmente, são colocadas  $N=2^{14}$  barras de chocolate na esteira de entrada de S. Depois que P colocou o selo em todas as barras de sua esteira, essas mesmas barras são recolocadas na entrada da máquina S e todo o processo é repetido. Estas iterações são realizadas seguidamente até que todas as barras estejam no estoque.



Calcule:

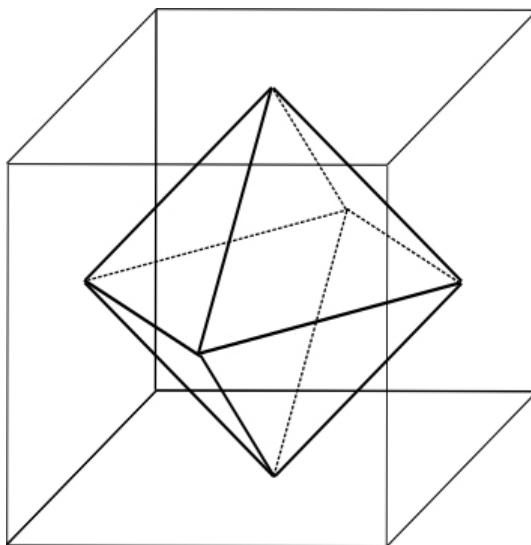
- A** o número máximo de selos em uma mesma barra de chocolate;  
**B** o número total de barras gratuitas que serão distribuídas.

## RESOLUÇÃO E RESPOSTA

NOTA

## MATEMÁTICA APLICADA

- 5 Um cubo tem aresta de comprimento  $a=6$  cm. Em cada face do cubo, considere seu “ponto central” (encontro das diagonais daquela face). Ligando o ponto central de cada face com o ponto central das faces adjacentes, tem-se as arestas de um novo poliedro, interior ao cubo original. Calcule o volume deste novo poliedro.



## RESOLUÇÃO E RESPOSTA

NOTA

## MATEMÁTICA APLICADA

6 A tabela ao lado mostra o *ranking* das seleções da FIFA em maio de 2019.















A cada seleção  $k$  é associada uma pontuação  $r_k$ , que procura refletir o quanto a seleção é “forte”.

A ideia aproximada do significado dessa pontuação é a seguinte: a probabilidade da seleção  $i$  (com pontuação  $r_i$ ) vencer a seleção  $j$  (com pontuação  $r_j$ ) é dada por:

$$\text{Prob } i \text{ vencer } j = \frac{1}{1 + 10^{(r_j - r_i)/600}}$$

Usando este modelo e a tabela com a pontuação da FIFA, determine quais seleções têm, no mínimo, 60% de probabilidade de vencer a seleção da Argentina.

Dados:  $\log_{10}(3) \approx 0,48$ ,  $\log_{10}(2) \approx 0,30$ .

Posição	Seleção	Pontos
1	 Bélgica	1737
2	 França	1734
3	 Brasil	1676
4	 Inglaterra	1647
5	 Croácia	1621
6	 Uruguai	1613
7	 Portugal	1607
8	 Suíça	1604
9	 Espanha	1601
10	 Dinamarca	1586
11	 Argentina	1580
12	 Colômbia	1573
13	 Alemanha	1570
14	 Suécia	1567

### RESOLUÇÃO E RESPOSTA

NOTA

## MATEMÁTICA APLICADA

- 7 Dados  $a$  e  $b$  inteiros positivos, sejam  $M(a,b) = \frac{a+b}{2}$  a média aritmética,  $G(a,b) = \sqrt{ab}$  a média geométrica e  $H(a,b) = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ , a média harmônica dos números  $a$  e  $b$ .

Determine o número de pares ordenados de inteiros positivos  $(a, b)$  que satisfazem a equação  $G(M(a,b), H(a,b)) = 2020$ .

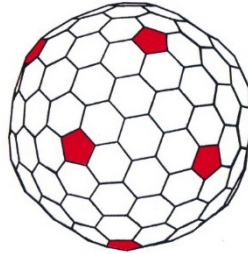
## RESOLUÇÃO E RESPOSTA

NOTA



## MATEMÁTICA APLICADA

- 8 O fulereno é uma família de substâncias químicas compostas exclusivamente por átomos de carbono. Considere uma forma comum de organização da molécula do fulereno, que é a de um poliedro convexo formado exclusivamente por pentágonos e hexágonos, onde cada vértice é um átomo de carbono. Todos os átomos de carbono se ligam sempre a três outros átomos de carbono, formando um poliedro convexo (veja figura).



fonte: Terrones, Structural Chemistry, 2002, vol: 13.

Sabendo que certa molécula de fulereno tem 240 faces hexagonais, determine o número  $p$  de faces pentagonais.

## RESOLUÇÃO E RESPOSTA

NOTA

---

**MATEMÁTICA APLICADA**

---

- 9 Considere o conjunto  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ , e seja  $P(A)$  o conjunto de todos os subconjuntos de  $A$ .  
Considere as funções  $f: A \rightarrow P(A)$ , isto é, funções que a cada  $x \in A$  associam um  $f(x)$ , que é um subconjunto de  $A$ .  
Determine quantas dessas funções existem tais que  $x \in f(x)$  para todo  $x \in A$ .

**RESOLUÇÃO E RESPOSTA**

NOTA
------

## MATEMÁTICA APLICADA

**10** Em certo campeonato de futebol de robôs, a seleção brasileira chegou à decisão por pênaltis. Instantes antes das cobranças, o atacante da seleção brasileira R2 e o goleiro adversário HAL estão sendo programados.

A programação do atacante consiste em escolher um número real  $p$ , com  $0 \leq p \leq 1$ . Esta escolha tem o efeito de fazer com que o atacante chute para a direita do gol com probabilidade  $p$  e chute para a esquerda do gol com probabilidade  $1 - p$ .

Da mesma forma, o técnico adversário escolhe um número real  $q$  para programar o goleiro, com  $0 \leq q \leq 1$ , que terá o efeito de fazê-lo pular para a direita do gol com probabilidade  $q$  e para a esquerda do gol com probabilidade  $1 - q$ .

Conhecendo tanto o atacante quanto o goleiro, ambos os técnicos têm o seguinte quadro sobre as probabilidades de o atacante marcar um gol, caso ele chute para a direita ou para a esquerda do gol e o goleiro pule para a direita ou para a esquerda do gol:

Atacante \ Goleiro	Pulo na direita do gol	Pulo na esquerda do gol
Chute na direita do gol	0,4	0,8
Chute na esquerda do gol	0,6	0,3

**A** Calcule a probabilidade de o atacante fazer gol caso  $p = 0,5$  e  $q = 0,5$ .

**B** A regra permite que o técnico do goleiro tenha o direito de saber o valor de  $p$  escolhido pelo técnico brasileiro antes de fazer a sua escolha de  $q$ . Suponha que o técnico do goleiro seja bem esperto e vai escolher o valor de  $q$  de modo a conseguir a menor probabilidade do atacante fazer o gol. Faça o gráfico da função  $y = f(p)$ , onde  $0 \leq p \leq 1$  é o valor escolhido pelo técnico brasileiro para o atacante e  $y$  é a probabilidade de o atacante marcar o gol.

**C** Ainda no cenário do item **B** determine o valor de  $p$  que o técnico brasileiro deve escolher para que o atacante brasileiro tenha maior probabilidade de marcar o gol.

NÃO  
ESCREVA  
NESSA ÁREA

---

**MATEMÁTICA APLICADA**

---

**QUESTÃO 10** (continuação)

**RESOLUÇÃO E RESPOSTA**

**NOTA**

**VESTIBULAR  FGV**

[www.fgv.br/processoseletivo](http://www.fgv.br/processoseletivo)

(11) 3799-7711 (São Paulo e grande São Paulo)

0800 770 0423 (demais localidades)